Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 5, стр. 234 – 236 *10 марта 1984 г.*

СУПЕРСИММЕТРИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ЭЛЕКТРОНЕ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Л.Э.Генденштейн

Уравнения Паули и Дирака для электрона в произвольном двумерном магнитном поле суперсимметричны. Вакуум может быть вырожден по бесконечномерному представлению группы, не являющейся группой симметрии гамильтониана. Суперсимметрия есть также в трехмерном поле с определенной четностью. Роль фермионного заряда при этом играет четность.

1. Суперсимметрия, как новый вид симметрии физических систем, включающий, наряду с коммутационными соотношениями, также и антикоммутационные, была предложена при исследовании моделей квантовой теории поля [1], и в этой области она еще ждет своего экспериментального подтверждения. Оказывается, однако, что суперсимметрия является физической симметрией важной и широко используемой задачи об электроне в неоднородном магнитном поле, направленном вдоль одной оси (z) и *произвольным* образом зависящем от двух других координат (x, y).

Наличие суперсимметрии в этой задаче связано с возможностью факторизации гамильтониана, обнаруженной и использованной в работах [2] для понижения порядка дифференциального уравнения, определяющего основные состояния. В этих же работах показано, что вследствие факторизации гамильтониана основное состояние может быть вырождено и в неоднородном магнитном поле, несмотря на потерю трансляционной инвариантности гамильтониана. В предлагаемой работе найдена группа, по (бесконечномерному) представлению которой может быть вырождено основное состояние, и сформулировано условие, при котором это имеет место.

2. Предлагаемое исследование может представить интерес не только для конкретной задачи об электроне в неоднородном магнитном поле, но и для анализа общей структуры суперсимметричных теорий: здесь реализуется суперсимметричная квантовая механика с *двумя* бозонными степенями свободы (x, y) и *одной* фермионной (спин). Различие в числе бозонных и фермионных степеней свободы (не мешая самому наличию суперсимметрии!) приводит к появлению качественно новых черт по сравнению с одномерной суперсимметричной квантовой механикой Виттена [3], а именно: суперсимметричный вакуум с энергией $E = 0$ может быть *вырожден*, несмотря на то, что гамильтониан не обладает никакой "внутренней" симметрией, кроме самой суперсимметрии. В частности, кратность вырождения вакуума может быть бесконечной, и, более того, он может быть вырожден по представлению группы симметрии *свободного* гамильтониана, если проводить аналогию с теорией поля.

Важно отметить, что это свойство вакуума устойчиво по отношению к произвольным непрерывным деформациям суперпотенциала, не меняющим его глобальных характеристик (см. ниже), т. е. имеет скорее топологическую, а не чисто групповую природу. Любопытно также, что это явление реализуется в системе с конечным числом степеней свободы.

3. Гамильтониан Паули [1] для частицы со спином 1/2 в двумерном магнитном поле имеет вид:

$$\hat{H} = (P_x^2 + P_y^2 + i\mu\sigma_3 [P_x, P_y])/2, \qquad (1)$$

где $P_x = p_x - eA_x$, $P_y = p_y - eA_y$, σ_i – матрицы Паули, μ – магнитный момент, измеренный в магнетонах Бора, $\hbar = c = m = 1$.

Если частица не имеет аномального магнитного момента, т. е. $\mu = 1$, то гамильтониан (1) обладает суперсимметрией, алгебра которой:

$$\{Q_i, Q_k\} = \delta_{ik}\hat{H}; \quad [Q_i, \hat{H}] = 0; \quad i, k = 1, 2 \qquad (2)$$

и генераторы суперсимметрии $Q_1 = (\sigma_1 P_x + \sigma_2 P_y)/2$, $Q_2 = (\sigma_2 P_x - \sigma_1 P_y)/2$.

Заметим, что суперсимметрия оказывается тесно связанной с принципом минимального включения взаимодействия с электромагнитным полем как с *калибровочным*, и требование, чтобы нерелятивистский гамильтониан Паули был суперсимметричен, однозначно определяет величину магнитного момента электрона, равную магнетону Бора. Как известно, это значение магнитного момента для электрона следует из принципа минимального включения только в релятивистской теории Дирака.

Существование двух антикоммутирующих интегралов движения – суперзарядов Q_1 и Q_2 приводит к двукратному (четнократному) вырождению всех уровней с энергией $E > 0$. Это обобщает известное двукратное вырождение уровней Ландау в однородном поле [2,4]. Вырожденные по энергии состояния – суперпартнеры – переводятся друг в друга действием генераторов суперсимметрии $Q_\pm = Q_1 \pm iQ_2$, *одновременно* изменяющими направление спина и вид зависимости волновой функции от x, y. Существенное отличие неоднородного поля от однородного состоит в том, что в однородном поле состояния-суперпартнеры принадлежат одной серии орбит, а в неоднородном – двум различным сериям.

4. Определение состояний с энергией $E = 0$, называемых ниже "вакуумами", сводится, вследствие (1), (2), к нахождению решений уравнения первого порядка для однокомпонентных функций [2]:

$$P_+ \psi = -(2i\partial/\partial\bar{z} + eA(z, \bar{z}))\psi(z, \bar{z}) = 0, \qquad (3)$$

где $z = x + iy$, $A = A_x + iA_y$, $P_+ = P_x + iP_y$. Из (3) следует, что $\psi = f(z)\exp(-\varphi)$, где $f(z)$ – целая функция, а φ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = eB_z(x, y)$ [2]. Мы выбираем калибровку $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Кратность вырождения вакуума равна числу линейно независимых целых функций $f(z)$, соответствующих квадратично-интегрируемым ψ. Если полный магнитный поток бесконечен, то вакуум вырожден бесконечно-кратно, несмотря на то, что магнитное поле может не иметь никакой регулярности.

5. С целью определения группы, по представлению которой вырожден вакуум, заметим, что она должна быть группой симметрии оператора P_+, но не обязательно гамильтониана $\hat{H}$. Оператор P_+ коммутирует с операторами $a = \partial/\partial z + i\bar{A}(z, \bar{z})/2$ и z, которые

[1] Всюду в дальнейшем рассматривается нерелятивистский случай, но все выводы с очевидной модификацией справедливы и для релятивистского уравнения Дирака, с тем отличием, что для безмассового фермиона соответствующие основные состояния – это настоящие нулевые моды.

[2] Мы выбираем $e\Phi > 0$, магнитный поток $\Phi = \int B_z(x, y)dxdy$ и будем рассматривать поля, не имеющие сингулярностей и сохраняющие направление.

подчиняются коммутационному соотношению, определяющему алгебру Гейзенберга – Вейля: $[a, z] = 1$. Для того, чтобы операторам a и z соответствовало представление группы Гейзенберга – Вейля на волновых функциях основного состояния вида $f(z)\exp(-\varphi)$, достаточно, чтобы норма, определяемая для целых функций скалярным произведением $(u, v)_\varphi = \int \overline{u(z)}\, v(z) \exp(-2\varphi) d\bar{z} dz$, была эквивалентной соответствующей норме для однородного поля $(u, v)_0 = \int \overline{u(z)}\, v(z) \exp(-eB_0\bar{z}z/2) d\bar{z}dz$ [3]. При этом представление эквивалентно унитарному. Нерегулярность поля факторизуется для основных функций основного состояния в виде множителя $\exp(-\varphi)$ при целых функциях, аналогично тому, как это имеет место в однородном поле, для которого $\varphi = eB_0\bar{z}z/4$. Различие между однородным и неоднородным полем состоит в том, что в однородном поле разным основным состояниям соответствуют волновые пакеты, имеющие различную локализацию (вырождение по центру орбиты), но одинаковую форму, а в неоднородном поле при сдвиге меняется также и форма волнового пакета.

6. Суперсимметрия гамильтониана Паули для частицы с магнитным моментом, равным магнетону Бора, есть и в трехмерном поле, если $\mathbf{A}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Операторами, образующими алгебру суперсимметрии (2), являются при этом $Q_1 = \vec{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})/2$ и $Q_2 = iIQ_1$, где I – оператор четности. Генераторы суперсимметрии $Q_\pm = Q_1 \pm iQ_2 = (1 \pm I)Q_1$, действуя на состояния с определенной четностью, либо аннигилируют их, либо изменяют их четность на противоположную. Таким образом, в этом примере обобщается понятие "фермионной степени свободы": роль состояний с "фермионным числом" 0 и 1 играют состояния с определенной четностью.

Автор глубоко признателен Д.В.Волкову, В.Г.Дринфельду и И.В.Криве за многочисленные полезные обсуждения, а также Вл.Л.Гинзбургу, О.Б.Заславскому и Ю.П.Степановскому за замечания.

Литература

1. *Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П.* Письма в ЖЭТФ, 1971, **13**, 452; *Волков Д.В., Акулов В.П.* Письма в ЖЭТФ, 1972, **16**, 621; *Wess J., Zumino B.* Nucl. Phys., 1974, **B70**, 39.
2. *Aharonov Y., Casher A.* Phys. Rev., 1979, **A19**, 2461; *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* ЖЭТФ, 1980, **79**, 1006.
3. *Witten E.* Nucl. Phys., 1981, **B188**, 513.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика, 1974, М., с. 522.

Харьковский
физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
20 декабря 1983 г.

[3] Это условие выполняется для физически интересного случая $B_z(x, y) = B_0 + b(x, y)$, если поток нерегулярной части $b(x, y)$ в среднем равен нулю, и поле $B_z(x, y)$ не обращается в нуль.